

ANAGRAMMI

Problema: Anagramma di MAMMA

Data una parola, quanti sono gli anagrammi, anche senza significato nella lingua italiana, di questa parola?

Esempio

Gli anagrammi della parola MAMMA sono tutte le parole di 5 lettere in cui compaiono due A e tre M

AAMMM	AMAMM	AMMAM	AMMMA	MAAMM
MAMAM	MAMMA	MMAAM	MMAMA	MMMAA

Come mai si tratta di 10 anagrammi? siamo sicuri che sono tutti?
Per capirlo: per determinare un anagramma basta specificare quali posizioni hanno le due A tra i 5 posti disponibili

ESEMPIO-anagrammi di MAMMA-I modo

Ad esempio MAMAM corrisponde a scegliere l'insieme $\{2, 4\}$
mentre MMMA corrisponde a scegliere l'insieme $\{4, 5\}$

AAMMM $\{1, 2\}$	AMAMM $\{1, 3\}$	AMMAM $\{1, 4\}$	AMMMA $\{1, 5\}$	MAAMM $\{2, 3\}$
MAMAM $\{2, 4\}$	MAMMA $\{2, 5\}$	MMAAM $\{3, 4\}$	MMAMA $\{3, 5\}$	MMMAA $\{4, 5\}$

di conseguenza, posto $N(MAMMA)$ il numero di anagrammi di MAMMA

$$N(MAMMA) = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!}$$

ESEMPIO-anagrammi di MAMMA-II modo

Si può pensare di avere a disposizione 5 tessere:

$$A_1, A_2, M_1, M_2, M_3$$

Possiamo permutarle in $5!$ modi, ottenendo così sicuramente tutti gli anagrammi di MAMMA, ma alcune permutazioni corrispondono allo stesso anagramma: infatti ad esempio

$$\begin{array}{llll} M_1 M_2 M_3 A_1 A_2, & M_1 M_2 M_3 A_2 A_1, & M_1 M_3 M_2 A_1 A_2, & M_1 M_3 M_2 A_2 A_1, \\ M_2 M_1 M_3 A_1 A_2, & M_2 M_1 M_3 A_2 A_1, & M_2 M_3 M_1 A_1 A_2, & M_2 M_3 M_1 A_2 A_1, \\ M_3 M_1 M_2 A_1 A_2, & M_3 M_1 M_2 A_2 A_1, & M_3 M_2 M_1 A_1 A_2, & M_3 M_2 M_1 A_2 A_1, \end{array}$$

sono $3! \cdot 2!$ permutazioni che sono associate allo stesso anagramma MMMAA

In altre parole le $5!$ permutazioni delle 5 tessere A_1, A_2, M_1, M_2, M_3 si possono contare come $N_A(MAMMA) \cdot 3! \cdot 2!$ da cui di nuovo

$$N_A(MAMMA) = \frac{5!}{2!3!}$$

anagrammi di MATEMATICA

Data la parola MATEMATICA, quanti sono gli anagrammi, anche senza significato nella lingua italiana, di questa parola?

Nel caso di MATEMATICA, $r = 10$ è il numero totale di lettere di cui è composta la parola MATEMATICA: inoltre si hanno

$$k_A = 3 \text{ A}, \quad k_M = 2 \text{ M}, \quad k_T = 2 \text{ T}, \quad k_E = 1 \text{ E}, \quad k_I = 1 \text{ I}, \quad k_C = 1 \text{ C}.$$

Si osservi che $3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 10$, ovvero

$$k_A + k_M + k_T + k_E + k_I + k_C = r.$$

Mostreremo ora che il numero $N_A(\text{MATEMATICA})$ degli anagrammi è

$$\binom{10}{3, 2, 2, 1, 1, 1} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{10!}{3! 2! 2! 1! 1! 1!}$$

Per convincersi che $N_A(\text{MATEMATICA}) = \frac{10!}{3! 2! 2! 1! 1! 1!}$ si può procedere in due modi.

numero degli ANAGRAMMI di MATEMATICA - I modo

A			A				A		
---	--	--	---	--	--	--	---	--	--

scelgo le posizioni delle tre A
in $\binom{10}{3}$ modi

A		M	A			M	A		
---	--	---	---	--	--	---	---	--	--

scelgo le posizioni delle due M
in $\binom{7}{2}$ modi

A		M	A	T		M	A	T	
---	--	---	---	---	--	---	---	---	--

scelgo le posizioni delle due T
in $\binom{5}{2}$ modi

A		M	A	T		M	A	T	E
---	--	---	---	---	--	---	---	---	---

scelgo la posizione della E
in $\binom{3}{1}$ modi

A		M	A	T	I	M	A	T	E
---	--	---	---	---	---	---	---	---	---

scelgo la posizione della I
in $\binom{2}{1}$ modi

A	C	M	A	T	I	M	A	T	E
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

per la posizione della C
rimane un solo modo

numero degli ANAGRAMMI di MATEMATICA - I modo

Per ottenere un anagramma si hanno $\boxed{\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = \frac{10!}{3!7!}}$

scelte possibili per posizionare le 3 lettere A nei 10 posti a disposizione.

Una volta collocate le 3 A,

rimangono 7 posti tra i quali scegliere dove mettere le 2 M, e il numero delle scelte possibili è allora $\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2!} = \frac{7!}{2!5!}$ e si arriva a

$$\boxed{\binom{10}{3} \binom{7}{2} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} \frac{7 \cdot 6}{2!} = \frac{10!}{3! \cancel{7!}} \frac{\cancel{7!}}{2!5!} = \frac{10!}{3!2!5!}}$$

scelte possibili per posizionare le 3 A e le 2 M.

Una volta collocate le 3 A e le 2 M,

rimangono 5 posti in cui mettere le 2 T, e le scelte possibili sono quindi

$\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = \frac{5!}{2!3!}$ e si arriva a

$$\boxed{\binom{10}{3} \binom{7}{2} \binom{5}{2} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} \frac{7 \cdot 6}{2!} \frac{5 \cdot 4}{2!} = \frac{10!}{3! \cancel{7!}} \frac{\cancel{7!}}{2! \cancel{5!}} \frac{\cancel{5!}}{2!3!} = \frac{10!}{3!2!2!3!}}$$

scelte possibili per posizionare le 3 A e le 2 M.

Procedendo in maniera analoga si hanno successivamente $\binom{3}{1} = \frac{3}{1!} = \frac{3!}{2!1!}$ scelte per collocare la E, $\binom{2}{1} = \frac{2}{1!} = \frac{2!}{1!1!}$ scelte per collocare la I, ed infine $\binom{1}{1} = \frac{1}{1!} = 1$ scelta obbligatoria per collocare la C.

RIASSUMENDO

$$\begin{aligned}
 N_A(\text{MATEMATICA}) &= \binom{10}{3} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1} \\
 &= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} \cdot \frac{7 \cdot 6}{2!} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2!} \cdot \frac{3}{1!} \cdot \frac{2}{1!} \cdot \frac{1}{1!} \\
 &= \frac{10!}{3! \cancel{7!}} \cdot \frac{\cancel{7!}}{2! \cancel{5!}} \cdot \frac{\cancel{5!}}{2! \cancel{3!}} \cdot \frac{\cancel{3!}}{1! \cancel{2!}} \cdot \frac{\cancel{2!}}{1! 1!} \cdot 1 \\
 &= \frac{10!}{3! 2! 2! 1! 1! 1!}
 \end{aligned}$$

numero degli ANAGRAMMI di MATEMATICA - II modo

Si può pensare di avere a disposizione 10 tessere:

$$A_1, A_2, A_3, M_1, M_2, T_1, T_2, E_1, I_1, C_1.$$

Possiamo permutarle in $10!$ modi, ottenendo così sicuramente tutti gli anagrammi di MATEMATICA, ma alcune permutazioni corrispondono allo stesso anagramma: infatti permutando tra loro A_1, A_2, A_3 (in $3!$ modi) l'anagramma rimane invariato, e lo stesso accade permutando tra loro M_1, M_2 (in $2!$ modi), oppure T_1, T_2 (in $2!$ modi). E quindi il numero totale degli anagrammi si ottiene dividendo $10!$ per $3! \cdot 2! \cdot 2!$:

$$\frac{10!}{3! 2! 2!} = \frac{10!}{3! 2! 2! 1! 1! 1!}.$$

(segue un esempio)

ESERCIZIO

Calcolare il numero degli anagrammi della parola

PATATE con 2 lettere A, 2 lettere T, 1 lettera E 1 lettera P

e scrivere l'espressione del numero degli anagrammi della parola

RABARBARO con 3 lettere A, 3 lettere R, 2 lettere B, 1 lettera O

Vediamo ora come calcolare in generale il numero degli anagrammi (anche senza senso) di una parola di lunghezza r , e con n tipi diversi di lettere, di cui k_1 lettere uguali alla lettera numero 1 (ad esempio la A), k_2 uguali alla lettera numero 2, **diversa dalla precedente**, (ad esempio la lettera B), k_3 uguali alla lettera numero 3, **diversa dalle precedenti** (ad esempio C), ..., k_n uguali alla lettera numero n , **diversa da tutte le precedenti**.

OSSERVIAMO CHE NECESSARIAMENTE $k_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^n k_i = r$

Generalizziamo ora i due procedimenti usati nei due Esempi precedenti per verificare che il NUMERO DEGLI ANAGRAMMI è dato dal coefficiente multinomiale, ossia

$$\frac{r!}{k_1! k_2! k_3! \cdots k_{n-1}! k_n!} \stackrel{\text{def.}}{=} \binom{r}{k_1, k_2, \dots, k_n}, \quad \text{dove } k_i \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^n k_i = r$$

Per l'anagramma della parola si hanno a disposizione r posti e tra questi r posti ne vanno scelti k_1 dove collocare la lettera numero 1, e ciò si può fare in $\binom{r}{k_1}$ modi.

Tra i rimanenti $r - k_1$ posti ne vanno poi scelti k_2 dove collocare la lettera numero 2, e ciò si può fare in $\binom{r-k_1}{k_2}$ modi.

Proseguendo si ottiene che il numero cercato è dato dal coefficiente multinomiale, ossia

$$\begin{aligned}
 & \binom{r}{k_1} \binom{r-k_1}{k_2} \binom{r-(k_1+k_2)}{k_3} \dots \\
 & \dots \binom{r-(k_1+k_2+\dots+k_{n-2})}{k_{n-1}} \binom{r-(k_1+k_2+\dots+k_{n-1})}{k_n} \\
 &= \binom{r}{k_1} \binom{r-k_1}{k_2} \binom{r-k_1-k_2}{k_3} \dots \binom{k_{n-1}+k_n}{k_{n-1}} \binom{k_n}{k_n} \\
 &= \frac{r!}{k_1! (r-k_1)!} \frac{(r-k_1)!}{k_2! (r-k_1-k_2)!} \frac{(r-k_1-k_2)!}{k_3! (r-k_1-k_2-k_3)!} \dots \frac{(k_{n-1}+k_n)!}{k_{n-1}! k_n!} \cdot 1
 \end{aligned}$$

Lasciamo al lettore di ripetere il ragionamento per ottenere il numero degli anagrammi, quando si hanno a disposizione r tessere con k_i tessere con la lettera i e numerate da 1 a k_i , per $i = 1, 2, \dots, n$, sempre con

$$k_1 \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n k_i = r$$

(ovviamente se $k_i = 0$ allora non ci sono tessere con la lettera i).
Ossia se $N_A(r; k_1, k_2, \dots, k_n)$ è il numero degli anagrammi della parola, allora

$$r! = N_A(r; k_1, k_2, \dots, k_n) \cdot k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!$$

È importante osservare che il **coefficiente multinomiale**

$$\binom{r}{k_1, k_2, \dots, k_n} = \frac{r!}{k_1! k_2! \cdots k_n!}$$

permette di ottenere i modi di dividere r elementi in n gruppi **etichettati**, di cui il gruppo 1 ha cardinalità k_1 , il gruppo 2 ha cardinalità $k_2, \dots$, il gruppo n ha cardinalità k_n .

Esempio dobbiamo dividere 10 ragazzi in 3 squadre: la squadra **ROSSA**, da **3** ragazzi, la squadra **VERDE**, da **3** ragazzi, e la squadra **GIALLA**, da **4** ragazzi.

Vedremo ora che il problema di calcolare questo numero è lo stesso che calcolare gli anagrammi della parola

RRRVVVGGGG

Il numero cercato coincide con il numero degli anagrammi della parola

RRRVVVGGGG

infatti per ottenere i tre gruppi: 3 Rossi, 3 Verdi, 4 Gialli
basta associare un colore ad ognuno dei dieci ragazzi (che indichiamo con i numeri $1, 2, \dots, 10$) e l'anagramma RRVVRGGVGG è una rappresentazione della funzione

$1 \mapsto R, \quad 2 \mapsto R, \quad 3 \mapsto V, \quad 4 \mapsto V, \quad 5 \mapsto R,$

$6 \mapsto G, \quad 7 \mapsto G, \quad 8 \mapsto V, \quad 9 \mapsto G, \quad 10 \mapsto G,$

ossia la squadra Rossa è composta dai ragazzi $\{1, 2, 5\}$, la squadra Verde è composta dai ragazzi $\{3, 4, 8\}$, e infine la squadra Gialla è composta dai rimanenti ragazzi $\{6, 7, 9, 10\}$.

In altre parole, nell'esempio precedente, abbiamo una terna

ORDINATA/ETICHETTATA di sottoinsiemi

$$H_R = \{1, 2, 5\}, H_V = \{3, 4, 8\} \text{ ed } H_G = \{6, 7, 9, 10\},$$

che formano una partizione dell'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$$\left(\overbrace{\{1, 2, 5\}}^{H_R}, \overbrace{\{3, 4, 8\}}^{H_V}, \overbrace{\{6, 7, 9, 10\}}^{H_G} \right)$$

in cui

il primo insieme H_R rappresenta l'insieme degli elementi della squadra **ROSSA**,
il secondo insieme H_V rappresenta l'insieme degli elementi della squadra **VERDE**,
e l'ultimo insieme H_G rappresenta l'insieme degli elementi della squadra **GIALLA**.

Il numero di questo tipo di oggetti è dato dal coefficiente multinomiale

$$N(RRRVVVGGGG) = \binom{10}{3,3,4} = \frac{10!}{3!3!4!}$$

Va sottolineato che, ad esempio,

$$\left(\overbrace{\{1, 2, 5\}}^{H_R}, \overbrace{\{3, 4, 8\}}^{H_V}, \overbrace{\{6, 7, 9, 10\}}^{H_G} \right) \neq \left(\overbrace{\{3, 4, 8\}}^{H_R}, \overbrace{\{1, 2, 5\}}^{H_V}, \overbrace{\{6, 7, 9, 10\}}^{H_G} \right)$$

in quanto, ad esempio, la squadra **ROSSA** nella prima terna è $\{1, 2, 5\}$, mentre
nella seconda terna la squadra **ROSSA** è $\{3, 4, 8\}$

ATTENZIONE!

se non ci interessa etichettare i gruppi (**in questo esempio con i colori**), il numero dei modi è diverso e va calcolato in modo opportuno.

ESEMPIO: se invece vogliamo dividere i ragazzi in **tre squadre (NON ETICHETTATE, ovvero non colorate)** di cui **due squadre da 3** elementi, e **una squadra da 4** elementi, in sostanza stiamo cercando una terna **NON ORDINATA** di sottoinsiemi

$$\{\{1, 2, 5\}, \{3, 4, 8\}, \{6, 7, 9, 10\}\}$$

Ovviamente è equivalente a dare la seguente famiglia

$$\{\{\{1, 2, 5\}, \{3, 4, 8\}\}, \{6, 7, 9, 10\}\}$$

che chiaramente coincide con

$$\{\{\{3, 4, 8\}, \{1, 2, 5\}\}, \{6, 7, 9, 10\}\}$$

ossia l'ordine in $\{\{1, 2, 5\}, \{3, 4, 8\}\}$ non ha importanza.

Confrontare l'uso delle PARENTESI GRAFFE, quando l'**ordine non ha importanza** con il precedente uso delle PARENTESI TONDE, quando invece l'**ordine non aveva importanza**

Dovrebbe essere quindi chiaro che il numero di tali oggetti si ottiene dal precedente coefficiente multinomiale diviso per $2!$, **che è il numero delle permutazioni di qualunque insieme di cardinalità 2, in questo caso i due elementi sono due sottoinsiemi di cardinalità 3** (nell'esempio si tratta delle permutazioni di $\{\{1, 2, 5\}, \{3, 4, 8\}\}$) ossia

$$\frac{1}{2!1!} \cdot \binom{10}{3,3,4} = \frac{1}{2!1!} \cdot \frac{10!}{3!3!4!}$$

Inoltre abbiamo diviso per $1!$ perché essendoci un unico insieme/elemento di cardinalità 4 c'è una sola permutazione.

Se invece avessimo **14** ragazzi da dividere in **4 squadre**, di cui **2 squadre** da **3** elementi e **2 squadre** da **4** elementi, **CON ETICHETTE/COLORI DIVERSI** allora il numero dei modi diversi è il coefficiente multinomiale

$$\binom{14}{3} \binom{11}{3} \binom{8}{4} \binom{4}{4} = \frac{14!}{3!3!4!4!}$$

MENTRE se facciamo la divisione in gruppi/squadre **SENZA ETICHETTE/COLORI**, allora il numero dei modi diviene

$$\frac{1}{2!2!} \cdot \binom{14}{3} \binom{11}{3} \binom{8}{4} \binom{4}{4} = \frac{1}{2!2!} \frac{14!}{3!3!4!4!}$$