PROPRIETÀ di base - 1
delle PROBABILITÀ

Giovanna Nappo

Università La Sapienza di Roma

25/26 settembre 2024

EVENTI come INSIEMI

Ogni evento viene descritto da un sottoinsieme di un insieme[1] Ω, ovvero da un elemento dell'insieme delle parti di Ω, che denotiamo come $\mathcal{P}(\Omega)$.
L'insieme Ω rappresenta tutti i casi possibili nell'esperimento che ci interessa (inizialmente si suppone che i casi possibili siano un numero finito (denotato con N).

Definizione

L'insieme $\Omega \equiv \{\omega_1, ..., \omega_N\}$ che ha come elementi gli eventi elementari di un esperimento viene detto **spazio campione**, *per quell'esperimento.*

Dato un evento E rappresentato da un sottoinsieme A si dice che l'evento E si verifica se e solo se si verifica un evento elementare ω_i che appartiene all'insieme A

[1] La lettera greca Ω si legge Omega maiuscolo. La lettera greca ω si legge "omega minuscolo" DA NON CONFONDERE con la lettera w ("vu doppio")

Operazioni booleane e Operazioni tra eventi

Dati due eventi E_1, E_2, rappresentati da due sottoinsiemi A_1, A_2 di Ω

(a) L'evento (E_1 ''oppure'' E_2) si verifica se e solo se si verifica un evento elementare ω_i che appartiene ad almeno uno dei due insiemi A_1 o A_2, ossia se appartiene all'insieme $A_1 \cup A_2$

(b) L'evento (E_1 e E_2) si verifica se e solo se si verifica un evento elementare ω_i che appartiene sia ad A_1 che ad A_2, ossia ad $A_1 \cap A_2$

(c) L'evento (''negazione'' di E_1) si verifica se e solo se si verifica un evento elementare ω_i che non appartiene ad A_1, ossia che appartiene ad $\overline{A}_1$, il complementare di A_1

ATTENZIONE: non confondere l'evento (E_1 ''oppure'' E_2) con l'evento (''o'' E_1 ''o'' E_2): quest'ultimo si verifica solo se si verifica uno solo dei due eventi, ossia se si verifica evento elementare ω_i che appartiene all'insieme $(A_1 \cap \overline{A}_2) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2)$

Interpretazione "logica" di nozioni di tipo insiemistico - 1

$A \subseteq B$ significa che ogni evento elementare che rende verificato A rende verificato anche B e dunque interpretiamo la relazione $A \subseteq B$ come "***A* implica *B***"

Ω è un evento vero qualunque evento elementare si verifichi, in quanto esso contiene tutti gli eventi elementari e dunque interpretiamo Ω come l'**evento certo**

$\emptyset$, l'insieme vuoto, non contenendo alcuno degli eventi elementari possibili, è un evento che non è mai verificato; dunque interpretiamo $\emptyset$ come l'**evento impossibile**

Interpretazione "logica" di nozioni di tipo insiemistico - 2

$A \cup B = \Omega$ significa che l'evento costituito dal verificarsi di almeno uno dei due eventi A o B coincide con l'evento certo Ω; dunque interpretiamo tale condizione come ***A* e *B* sono esaustivi** *(è certo che se ne verifichi* **almeno** *uno dei due)*

$A \cap B = \emptyset$ significa che l'evento costituito dal verificarsi di entrambi gli eventi A e B coincide con l'evento impossibile $\emptyset$; dunque interpretiamo la condizione $A \cap B = \emptyset$ come ***A* e *B* sono incompatibili** *(è certo che se ne verifichi* **al più** *uno dei due, ovvero che se ne verifichi* **al massimo** *uno dei due).*

Partizione (dell'evento certo)

Consideriamo una **collezione di sottoinsiemi** dello spazio Ω

$$\mathcal{H} = \{H_1, ..., H_m\}, \quad \text{con} \;\; H_\ell \in \mathcal{P}(\Omega), \; \ell = 1, ..., m.$$

Tale collezione costituisce una **partizione di $\boldsymbol{\Omega}$** se e solo se

$$H_{\ell_1} \cap H_{\ell_2} = \emptyset, \;\text{per}\; \ell_1 \neq \ell_2; \quad \bigcup_{\ell=1}^{m} H_\ell = \Omega.$$

Interpretando $H_1, ..., H_m$ come eventi, abbiamo che essi sono a **due a due incompatibili** (cioè è *impossibile che se ne possono verificare due contemporaneamente*) e, d'altra parte, essi sono **esaustivi** (è *certo che se ne verifichi almeno uno*). In altre parole è certo che si verifichi uno ed uno soltanto degli eventi $H_1, ..., H_m$.

Gli insiemi/eventi H_ℓ sono anche detti **elementi della partizione**

ATTENZIONE

Il concetto di partizione appena dato è un concetto insiemistico, da non confondere con la partizione di un hard-disk.

Proprietà basilari delle operazioni booleane su insiemi

Doppia negazione

$$\overline{\overline{A}} = A$$

Proprietà distributiva dell'unione rispetto all'intersezione:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

Proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Legge di De Morgan:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{o equivalentemente} \quad A \cap B = \overline{\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right)}$$

ossia, negare il verificarsi sia di A che di B equivale a richiedere il verificarsi di almeno una tra la negazione di A e la negazione di B.

Estensione delle precedenti proprietà

$$\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) \cap C = \bigcup_{i\in I} (A_i \cap C),$$

$$\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \cup C = \bigcap_{i\in I} (A_i \cup C),$$

$$\overline{\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big)} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \quad \text{o equivalentemente} \quad \bigcap_{i\in I} A_i = \overline{\bigcup_{i\in I} \overline{A_i}}$$

SPAZI DI PROBABILITÀ FINITI

Definizione

Uno **spazio finito di probabilità** *è una terna* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *dove* Ω *è un insieme finito,* $\mathcal{P}(\Omega)$ *è la famiglia delle parti di* Ω *e* $\mathbb{P}$ *è una* **misura di probabilità** *o, più semplicemente, una* **probabilità** *su* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, *ossia è una funzione che soddisfa i seguenti assiomi*[a]

i) $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$

ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ *(***condizione di normalizzazione***)*

iii) per $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ *allora* $\mathbb{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2)$ *(***proprietà di additività finita***)*

---

[a] Su alcuni testi la proprietà *i)* è sostituita dalla **proprietà di non negatività** , ossia: *i')* $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$, *con la proprietà che* $\mathbb{P}(E) \geq 0$ *per ogni* $E \in \mathcal{P}(\Omega)$.
È facile vedere che le proprietà *i')*, *ii)* e *iii) implicano che* $\mathbb{P}(E) \in [0, 1]$.

L'evento impossibile ha probabilità nulla

Siano $E_1 = E_2 = \emptyset$ allora $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ e quindi, per la proprietà di additività finita,

$$\mathbb{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2)$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbb{P}(\emptyset \cup \emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset)$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 2\mathbb{P}(\emptyset)$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

Proprietà di additività finita

La Proprietà *iii)* di additività si generalizza (ed è equivalente) alla seguente proprietà :
iii') **(proprietà di additività finita)** *Siano* $E_1, ..., E_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ *disgiunti (o incompatibili) a due a due, ovvero tali che*

$$E_i \cap E_j = \emptyset, \quad \text{per } i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}, \text{ con } i \neq j;$$

allora si ha
$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i). \tag{1}$$

La dimostrazione si ottiene facilmente per induzione su n: caso $n = 3$

SE $\quad E_1 \cap E_2 = \emptyset, \quad E_1 \cap E_3 = \emptyset \quad \text{e} \quad E_2 \cap E_3 = \emptyset,$

ALLORA $\quad (E_1 \cup E_2) \cap E_3 = (E_1 \cap E_3) \cup (E_3 \cap E_3) = \emptyset$ **E QUINDI**

$$\mathbb{P}\big(E_1 \cup E_2 \cup E_3\big) = \mathbb{P}\big((E_1 \cup E_2) \cup E_3\big) = \mathbb{P}\big(E_1 \cup E_2\big) + \mathbb{P}\big(E_3\big)$$
$$= \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) + \mathbb{P}(E_3)$$

PRIME PROPRIETÀ delle PROBABILITÀ

proprietà di base

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B).$$

VERIFICA: segue dalla proprietà *iii)* di additività per una probabilità, in quanto

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}),$$

e gli eventi $A \cap B$ e $A \cap \overline{B}$ sono incompatibili: $A \cap B \subset B$ e $A \cap \overline{B} \subset \overline{B}$.

probabilità del complementare

$$\mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \mathbb{P}(E),$$

VERIFICA: basta prendere $A = \Omega$ e $B = E$ nella proprietà di base, per cui

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega \cap E) + \mathbb{P}(\Omega \cap \overline{E}) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(\overline{E}).$$

(proprietà di monotonia)

se $A \subseteq B$ allora risulta

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B).$$

VERIFICA: basta osservare che se $A \subseteq B$, allora $A \cap B = A$ e quindi, dalla precedente proprietà di base

$$\mathbb{P}(B) = \underbrace{\mathbb{P}(A \cap B)}_{=\mathbb{P}(A)} + \underbrace{\mathbb{P}(\overline{A} \cap B)}_{\geq 0} \geq \mathbb{P}(A).$$

probabilità di $B \setminus A$

ricordando che $B \setminus A = B \cap \overline{A}$, sempre dalla proprietà base si ha

$$\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B \cap \overline{A}) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Se INOLTRE $A \subset B$ allora $A \cap B = A$, e quindi

$$\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A).$$

formula di inclusione ed esclusione per due eventi

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

VERIFICA: da una parte

$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$$

e quindi

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) + \mathbb{P}(B \cap \overline{A}),$$

e dall'altra, per la proprietà di base,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)\\ &= \underbrace{\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B})}_{=\mathbb{P}(A)} + \underbrace{\cancel{\mathbb{P}(A \cap B)} + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)}_{=\mathbb{P}(B)} - \cancel{\mathbb{P}(A \cap B)}.\end{aligned}$$

proprietà delle partizioni (dell'evento certo)-1

Sia $\mathcal{H} = \{H_1, ..., H_n\}$ una partizione, ossia

$$\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega, \quad H_i \cap H_j = \emptyset \quad \text{per } i \neq j,$$

allora si ha

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(H_i) = 1.$$

VERIFICA:

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} H_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(H_i)$$

dove la prima uguaglianza vale per la proprietà di normalizzazione, e l'ultima per l'additività finita in quanto gli eventi H_i sono incompatibili a due a due.

proprietà delle partizioni (dell'evento certo)-2

Sia $\mathcal{H} = \{H_1, ..., H_n\}$ una partizione, ossia
$\bigcup_{i=1}^n H_i = \Omega, \quad H_i \cap H_j = \emptyset \quad$ per $i \neq j$,allora per ogni evento E si ha

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(H_i \cap E).$$

VERIFICA:

$$E = E \cap \Omega = E \cap \bigcup_{i=1}^{n} H_i = \bigcup_{i=1}^{n} (E \cap H_i)$$

per la proprietà distributiva dell'unione rispetto all'intersezione

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} (E \cap H_i)\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E \cap H_i)$$

per l'additività finita: gli eventi $E \cap H_i$ sono incompatibili a due a due, in quanto sottoinsiemi di eventi incompatibili a due a due: $(E \cap H_i) \cap (E \cap H_j) \subseteq H_i \cap H_j = \emptyset$.

una partizione particolare

In particolare, si può considerare la partizione

$$\mathcal{H} = \{H_i = \{\omega_i\}, \quad i = 1, 2, ..., N\}$$

e quindi, posto $p(\omega_i) := \mathbb{P}(\{\omega_i\}), \quad i = 1, ..., N$, risulta

$$p(\omega_i) \geq 0 \qquad \text{e} \qquad \sum_{i=1}^{N} p(\omega_i) = 1.$$

calcolo di $\mathbb{P}(E)$ con la funzione $p: \ \Omega \in [0,1], \ \omega \mapsto p(\omega) := \mathbb{P}(\{\omega\})$

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{i:\, \omega_i \in E} p(\omega_i) = \sum_{\omega \in E} p(\omega).$$

in quanto, se $E = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, ..., \omega_{i_k}\} = \{\omega_{i_1}\} \cup \{\omega_{i_2}\} \cup \cdots \cup \{\omega_{i_k}\}$

allora $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(\{\omega_{i_1}\}) + \mathbb{P}(\{\omega_{i_2}\}) + \cdots + \mathbb{P}(\{\omega_{i_k}\})$

$$= p(\omega_{i_1}) + p(\omega_{i_2}) + \cdots + p(\omega_{i_k})$$

Una probabilità $E \mapsto \mathbb{P}(E)$ è una funzione su $\mathcal{P}(\Omega)$, l'insieme delle parti di Ω. Se $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_N\}$, allora la cardinalità di Ω e di $\mathcal{P}(\Omega)$ valgono

$$|\Omega| = N \quad |\mathcal{P}(\Omega)| = 2^N.$$

Abbiamo appena visto che, data $\mathbb{P}$, si ricava la funzione $p : \Omega \to [0, 1]$, definita come $p(\omega) = \mathbb{P}(\{\omega\})$, dalla quale a sua volta si può di nuovo ricavare $E \mapsto \mathbb{P}(E)$.

Può essere conveniente fare il percorso inverso, ossia, partire da una funzione $\omega \in \Omega \mapsto p(\omega)$ con le proprietà

$$p(\omega_i) \geq 0, i = 1, 2, ..., N, \qquad \sum_{i=1}^{N} p(\omega_i) = 1$$

e definire una funzione $\mathbb{P}$ su $\mathcal{P}(\Omega)$

$$E \mapsto \mathbb{P}(E) := \sum_{i:\, \omega_i \in E} p(\omega_i) = \sum_{\omega \in E} p(\omega)$$

È facile convincersi che grazie alle proprietà

$$p(\omega_i) \geq 0,\ i = 1, 2, ..., N \text{ e } \textstyle\sum_{i=1}^{N} p(\omega_i) = 1,$$

la funzione $\quad E \mapsto \mathbb{P}(E) := \sum_{\omega \in E} p(\omega) \quad$ è una probabilità,

ossia soddisfa le proprietà/assiomi *i*), *ii*) e *iii*).

Le prime due proprietà sono banali, la *iii*) (additività) deriva da:
se $E = \{\omega_{j_1}, \omega_{j_2}, ..., \omega_{j_m}\} \subset \Omega$ ed $F = \{\omega_{k_1}, \omega_{k_2}, ..., \omega_{k_r}\} \subset \Omega$, e $E \cap F = \emptyset$, allora

$$\overbrace{\{\omega_{j_1}, \omega_{j_2}, ..., \omega_{j_m}\}}^{=E} \cup \overbrace{\{\omega_{k_1}, \omega_{k_2}, ..., \omega_{k_r}\}}^{=F} = \overbrace{\{\omega_{j_1}, \omega_{j_2}, ..., \omega_{j_m}, \omega_{k_1}, \omega_{k_2}, ..., \omega_{k_r}\}}^{=E\cup F}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E \cup F) &= \overbrace{p(\omega_{j_1}) + p(\omega_{j_2}) + ... + p(\omega_{j_m})}^{=\mathbb{P}(E)} + \overbrace{p(\omega_{k_1}) + p(\omega_{k_2}) + ... + p(\omega_{k_r})}^{=\mathbb{P}(F)} \\
&= \sum_{h=1}^{m} p(\omega_{j_h}) + \sum_{\ell=1}^{r} p(\omega_{k_\ell}) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F)
\end{aligned}$$

Esempio (Un esempio concreto di spazio di probabilità finito)

Sia $\Omega = \{a, b, c, d\}$ *(possiamo pensare* $\omega_1 = a$, $\omega_2 = b$, $\omega_3 = c$, $\omega_4 = d$*) e siano* $p(a) = 1/8$, $p(b) = 1/4$, $p(c) = 1/2$ $p(d) = 1/8$. *Chiaramente* $p(a)$, $p(b)$, $p(c)$, $p(d) \geq 0$ *e* $p(a) + p(b) + p(c) + p(d) = 1$. *Allora la probabilità definita sull'insieme delle parti di* $\Omega = \{a, b, c, d\}$ *tramite la formula*

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{\omega \in E} p(\omega),$$

è data dalla funzione che è specificata nella seguente tabella.

$E \mapsto \mathbb{P}(E)$ tramite $p : \{a, b, c, d\} \to [0, 1]$

$$
\begin{aligned}
\emptyset &\mapsto \mathbb{P}(\emptyset) = 0\\
\{a\} &\mapsto \mathbb{P}(\{a\}) = p(a) = 1/8\\
\{b\} &\mapsto \mathbb{P}(\{b\}) = p(b) = 1/4\\
\{c\} &\mapsto \mathbb{P}(\{c\}) = p(c) = 1/2\\
\{d\} &\mapsto \mathbb{P}(\{d\}) = p(d) = 1/8\\
\{a, b\} &\mapsto \mathbb{P}(\{a, b\}) = p(a) + p(b) = 1/8 + 1/4 = 3/8\\
\{a, c\} &\mapsto \mathbb{P}(\{a, c\}) = p(a) + p(c) = 1/8 + 1/2 = 5/8\\
\{a, d\} &\mapsto \mathbb{P}(\{a, d\}) = p(a) + p(d) = 1/8 + 1/8 = 1/4\\
\{a, b\} &\mapsto \mathbb{P}(\{b, c\}) = p(b) + p(c) = 1/4 + 1/2 = 3/4\\
\{b, d\} &\mapsto \mathbb{P}(\{b, d\}) = p(b) + p(d) = 1/4 + 1/8 = 3/8\\
\{c, d\} &\mapsto \mathbb{P}(\{c, d\}) = p(c) + p(d) = 1/2 + 1/8 = 5/8\\
\{a, b, c\} &\mapsto \mathbb{P}(\{a, b, c\}) = p(a) + p(b) + p(c) = 1/8 + 1/4 + 1/2 = 7/8\\
\{a, b, d\} &\mapsto \mathbb{P}(\{a, b, d\}) = p(a) + p(b) + p(d) = 1/8 + 1/4 + 1/8 = 1/2\\
\{a, c, d\} &\mapsto \mathbb{P}(\{a, c, d\}) = p(a) + p(c) + p(d) = 1/8 + 1/2 + 1/8 = 3/4\\
\{b, c, d\} &\mapsto \mathbb{P}(\{b, c, d\}) = p(b) + p(c) + p(d) = 1/4 + 1/2 + 1/8 = 7/8\\
\{a, b, c, d\} &\mapsto \mathbb{P}(\{a, b, c, d\}) = p(a) + p(b) + p(c) + p(d) = 1/8 + 1/4 + 1/2 + 1/8 = 1
\end{aligned}
$$

come definire una funzione $p : \Omega \to [0, 1]$

Sempre nel caso in cui Ω è finito, la funzione p può essere definita a meno di un fattore di proporzionalità , ovvero dati N numeri non negativi (e non tutti nulli) $g(i)$, $i = 1, 2, ..., N$, si pone $p(\omega_i)$ proporzionale a $g(i)$:

$$p(\omega_i) \propto g(i) \Leftrightarrow \exists\ K \text{ tale che, } \forall\ i = 1, 2, ..., N \text{ si ha } p(\omega_i) = Kg(i),$$

In tale caso

$$\textstyle\sum_{i=1}^{N} p(\omega_i) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{N} Kg(i) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad K = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} g(i)}$$

Esempio

Sia $\Omega = \{a, b, c, d\}$, ovvero $\omega_1 = a$, $\omega_2 = b$, $\omega_3 = c$, $\omega_4 = d$, e sia $g(1) = 1$, $g(2) = 2$, $g(3) = 4$, e $g(4) = 1$, allora

$$K = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} g(i)} = K = \frac{1}{1 + 2 + 4 + 1} = \frac{1}{8}$$

e quindi $p(a) = 1/8$, $p(b) = 1/4$, $p(c) = 1/2$ $p(d) = 1/8$, come nel precedente esempio.

Definizione

Uno **spazio numerabile di probabilità** *è una terna* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *dove* Ω *è un insieme numerabile,* $\mathcal{P}(\Omega)$ *è la famiglia delle parti di* Ω *e* $\mathbb{P}$ *è una* **misura di probabilità** *o, più semplicemente, una* **probabilità** *su* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$*, ossia è una funzione che soddisfa i seguenti assiomi*

i) $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$

ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ *(***condizione di normalizzazione***)*

iii)" Se E_n*,* $n \geq 1$*, sono eventi incompatibili a due a due, ossia* $E_i \cap E_j = \emptyset$*, per ogni* $i \neq j$ *allora*

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\geq 1} E_n\Big) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(E_n)$$

*(***proprietà di additività numerabile o di sigma-additività***)*

L'evento impossibile ha probabilità nulla

VERIFICA: la verifica è simile a quella del caso finito.
Sia $c := \mathbb{P}(\emptyset)$ e siano $E_n = \emptyset$, per ogni $n \geq 1$. Gli eventi E_n sono disgiunti a due a due e quindi

$$\mathbb{P}\Big(\underbrace{\bigcup_{n\geq 1} E_n}_{=\emptyset}\Big) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(\underbrace{E_n}_{=\emptyset})$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbb{P}(\emptyset) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(\emptyset)$$

e una serie a termini costanti (in questo caso tutti uguali a $\mathbb{P}(\emptyset)$) è convergente se e solo se la costante è uguale a zero.

L'additività numerabile implica l'additività finita

in simboli: se $E_1, ..., E_n$ sono eventi incompatibili al due a due, ossia

$$E_i \cap E_j = \emptyset, \quad \text{per ogni } i \neq j,\ i, j \in \{1, 2, ..., n\}$$

allora $$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i)$$

VERIFICA:

Poniamo $E_j = \emptyset$ per $j > n$, in modo che $\bigcup_{j>n} E_i = \emptyset$ e quindi
$\Big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big) = \Big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big) \cup \Big(\bigcup_{j>n} E_i\Big) = \bigcup_{i\geq 1} E_i$ da cui

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i\geq 1} E_i\Big) = \sum_{i\geq 1} \mathbb{P}(E_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i) + \sum_{i>n} \overbrace{\mathbb{P}(E_i)}^{=\mathbb{P}(\emptyset)=0} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i)$$

dove nella seconda uguaglianza si usa l'additività numerabile, in quanto si tratta di una successione di eventi disgiunti a due a due:
per ogni $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, si ha $E_i \cap E_j = \emptyset$, per ipotesi,
per ogni $i \neq j$, $i, j > n$ si ha $E_i \cap E_j = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$,
per ogni $i \neq j$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ e $j > n$ si ha $E_i \cap E_j = E_i \cap \emptyset = \emptyset$, (e lo stesso vale per $j \in \{1, 2, ..., n\}$ e $i > n$)

Proprietà delle probabilità in spazi numerabili

Grazie al fatto che l'additività numerabile implica l'additività finita, tutte le proprietà che abbiamo visto in precedenza continuano a valere anche negli spazi di probabilità numerabili.

Estensioni a partizioni numerabili

Sia $\mathcal{H} = \{H_n,\ n \geq 1\}$ una partizione numerabile (dell'evento certo), ossia $\bigcup_{i\geq 1} H_i = \Omega, \quad H_i \cap H_j = \emptyset \quad$ per $i \neq j$,allora per ogni evento E si ha

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(H_i \cap E).$$

VERIFICA:

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E \cap \Omega) = \mathbb{P}\Big(E \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i\Big) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} (E \cap H_i)\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E \cap H_i)$$

dove si usa la proprietà distributiva dell'unione rispetto all'intersezione e l'additività numerabile in quanto gli eventi $E \cap H_i$ sono incompatibili a due a due, in quanto sottoinsiemi di eventi incompatibili a due a due.

AVVERTENZA

Per poter usare gli spazi numerabili bisogna avere un minimo di familiarità con le serie e la convergenza di serie.

In pratica basta avere familiarità con la serie esponenziale $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

e con la serie geometrica, i cui termini sono una progressione geometrica,

ossia con la serie $$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

e le serie delle sue derivate prime e seconde,

ossia $$\sum_{k=0}^{\infty} k\, x^{k-1} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\, x^{k-2}$$

Faremo qualche richiamo in seguito

nome